

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

Институт физико-математического образования,  
информационных и обслуживающих технологий  
Кафедра фундаментальной математики

УТВЕРЖДАЮ

Врио директора Института физико-математического образования,  
информационных и обслуживающих технологий

Е.А. Журавлева  
« 17 » 2025

Приложение к рабочей программе учебной дисциплины

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации  
обучающихся по дисциплине

Избранные вопросы математического анализа

Направление подготовки 01.04.01 Математика

Магистерская программа –

Квалификация выпускника магистр

Форма обучения очная

Курс 1 курс

Разработчик  
заведующий кафедрой  
фундаментальной математики  
Темникова С.В.

Заведующий кафедрой  
фундаментальной математики  
Темникова С.В.

Протокол  
от « 13 » 2025 г., № 7

Луганск, 2025

## 1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

### 1.1. Область применения

Фонд оценочных средств (ФОС) – неотъемлемая часть рабочей программы дисциплины (модуля) «Избранные вопросы математического анализа» и предназначен для контроля и оценки образовательных достижений студентов, освоивших программу дисциплины (модуля).

### 1.2. Цели и задачи фонда оценочных средств

Цель ФОС – установить соответствие уровня подготовки обучающегося требованиям ФГОС ВО магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 12 (с изменениями и дополнениями).

### 1.3. Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения основной образовательной программы

Процесс освоения дисциплины направлен на овладение следующими компетенциями:

Код по ФГОС ВО	Индикатор достижения
Профессиональные	
ПК-1 – Способен применять результаты научных исследований при решении профессиональных задач, самостоятельно осуществлять научное исследование.	ПК-1.1. Умеет математически корректно формулировать и решать основные профессиональные задачи на основе результатов научных исследований в области математики.

### 1.4. Этапы формирования компетенций и средства оценивания уровня их сформированности

Этапы формирования компетенций	Компетенции	Контрольно-оценочные средства / способ оценивания
Тема 1. Структура линейных множеств	ПК-1	•решение практических заданий; •теоретический отчет; •реферат.
Тема 2. Мощность и мера множества	ПК-1	•решение практических заданий; •теоретический отчет; •реферат.
Тема 3. Измеримые функции	ПК-1	•решение практических заданий; •теоретический отчет; •реферат.
Промежуточная аттестация	ПК-1	зачет
Тема 4. Различные определения интеграла по Лебегу	ПК-1	•решение практических заданий; •реферат.
Тема 5. Сравнение с	ПК-1	•решение практических заданий; •реферат.

интегралом по Риману		
Тема 6. Функции конечной вариации и абсолютно непрерывные функции	ПК-1	<ul style="list-style-type: none"> <li>• решение практических заданий;</li> <li>• реферат.</li> </ul>
Тема 7. Построение интеграла Римана-Стилтьеса	ПК-1	<ul style="list-style-type: none"> <li>• решение практических заданий;</li> <li>• реферат.</li> </ul>
Тема 8. Понятие интеграла Лебега-Стилтьеса	ПК-1	<ul style="list-style-type: none"> <li>• решение практических заданий;</li> <li>• реферат.</li> </ul>
Тема 9. Приложения в теории аппроксимаций	ПК-1	<ul style="list-style-type: none"> <li>• решение практических заданий;</li> <li>• реферат.</li> </ul>
Промежуточная аттестация	ПК-1	экзамен (письменный)

### 1.5. Описание показателей формирования компетенций

Код и наименование компетенции	Показатели достижения компетенций (знать, уметь, владеть)
ПК-1 – Способен применять результаты научных исследований при решении профессиональных задач, самостоятельно осуществлять научное исследование.	<p><b>знать:</b> постановку актуальных и значимых задач современного математического анализа; важнейшие свойства линейных мер и основных видов интегралов, применяемых в современном анализе;</p> <p><b>уметь:</b> использовать аппарат математического анализа для математически корректной формулировки и решения профессиональных задач на основе результатов научных исследований в области математики;</p> <p><b>владеть:</b> основными методами современного математического анализа, в частности, навыками подбора подходящего вида меры и интеграла для адекватного применения в той или иной области математики или естественнонаучных дисциплин; методами моделирования естественнонаучных задач в форме интегралов.</p>

### 1.6. Критерии оценивания компетенций на разных этапах их формирования

#### Система оценивания учебных достижений студентов очной формы обучения

Вид текущей учебной работы	Количество баллов
1 семестр	
Теоретический отчет	20
Реферат	20
Решение практических заданий	60
Итого за семестр (зачет):	100
2 семестр	

Реферат	20
Решение практических заданий	20
Экзамен (письменный)	60
<b>Итого:</b>	<b>100</b>

### Накопительная система оценивания по 100-балльной шкале

Четырехбалльная система оценивания экзамена	100-балльная шкала	Буквенная шкала, соответствующая 100-балльной шкале	Система оценивания зачета
Отлично	<b>90–100</b>	<b>А</b> – отлично – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному	Зачтено
Хорошо	<b>83–89</b>	<b>В</b> – очень хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения большинства из них оценено числом баллов, близким к максимальному	
Хорошо	<b>75–82</b>	<b>С</b> – хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью; некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения ни одного из них не оценено минимальным числом баллов, некоторые виды заданий выполнены с ошибками	
Удовлетворительно	<b>63–74</b>	<b>Д</b> – удовлетворительно – теоретическое содержание дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, содержат ошибки	
Удовлетворительно	<b>50–62</b>	<b>Е</b> – посредственно – теоретическое содержание курса освоено частично; некоторые практические навыки работы не сформированы, многие предусмотренные программой обучения учебные задания не выполнены либо качество выполнения некоторых из них оценено числом баллов,	

		близким к минимальному	
Неудовлетворительно	<b>21–49</b>	<b>FX</b> – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса освоено частично; необходимые практические навыки работы не сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено либо качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному; при дополнительной самостоятельной работе над материалом курса возможно повышение качества выполнения учебных заданий	Не зачтено
Неудовлетворительно	<b>0–20</b>	<b>F</b> – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса не освоено; необходимые практические навыки работы не сформированы; все выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения учебных заданий	

### 1.7. Образец оформления экзаменационного билета

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

2025/2026 учебный год

ИНСТИТУТ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ,  
ИНФОРМАЦИОННЫХ И ОБСЛУЖИВАЮЩИХ ТЕХНОЛОГИЙ

КАФЕДРА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

экзамен (письменный) по дисциплине  
«Избранные вопросы математического анализа»

Код/названия направлений подготовки **01.04.01 Математика**  
ОФО  
2 семестр

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 0

1. Мера Лебега-Стилтьеса. Интеграл Лебега-Стилтьеса и его свойства.
2. Представление систем Маркова при помощи интеграла Стилтьеса.
3. Докажите измеримость функции  $f(x) = \varphi(x) \sin x$ , определенной на отрезке  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , где  $\varphi(x)$  - функция Дирихле.

Утверждено на заседании кафедры фундаментальной математика, протокол  
№ от 2025 года.

Заведующий кафедрой  
фундаментальной математики

\_\_\_\_\_ Темникова С.В.

Экзаменатор

\_\_\_\_\_ Темникова С.В.

## **2. КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА**

### **2.1. Оценочные средства текущего контроля (типовые)**

#### **Вопросы для теоретического опроса**

1. Множество мощности континуума.
2. Множества пространства  $E_n$ .
3. Замкнутые и открытые множества.
4. Строение линейных замкнутых и открытых множеств.
5. Множество Кантора и его основные свойства.
6. Мощность совершенного множества.
7. Точки конденсации. Мощность несчетного замкнутого множества.
8. Мера Жордана для линейных множеств.
9. Мера Жордана для множества  $E_n$ . Квадрируемые и кубируемые множества.
10. Мера Лебега для линейных множеств. Понятие измеримого по Лебегу множества. Примеры измеримых множеств.
11. Свойства множеств, измеримых по Лебегу.
12. Измеримые функции.
13. Дифференцирование и интегрирование под знаком интеграла.
14. Случай, когда подынтегральное выражение и пределы интеграла зависят от параметра.
15. Равномерная сходимость интегралов.
16. Использование равномерной сходимости интегралов (предельный переход под знаком интеграла, интегрирование и дифференцирование интеграла по параметру).
17. Эйлеров интеграл первого типа.
18. Эйлеров интеграл второго типа. Свойства функции  $\Gamma(a)$ .

#### **Темы рефератов**

1. Интегралы, зависящие от параметра.
2. Равномерная сходимость интегралов.
3. Применение равномерной сходимости интегралов.
4. Эйлеровы интегралы.
5. Канторовы совершенные множества.
6. Канторовы множества положительной меры.
7. Классы измеримых функций.
8. Определение интеграла Лебега через простые функции.
9. Сравнение несобственных интегралов Римана и Лебега.
10. Функции конечной вариации и абсолютно непрерывные функции.
11. Эквивалентные определения абсолютно непрерывных функций.

12. Приближенное вычисление определенных интегралов, которые не берутся через элементарные функции.
13. Достаточные условия существования интеграла Римана-Стилтьеса.
14. Сведение интеграла Лебега-Стилтьеса к интегралу Лебега.
15. Системы функций Чебышева и Маркова.
16. Приложения теории аппроксимаций.
17. Ряды и интеграл Фурье.

### Типовые практические задания:

1. Какую мощность имеет множество действительных чисел вида  $\frac{\sqrt[k]{n}}{m}$ , где  $n, m, k$  - натуральные числа? Какую мощность имеет множество комплексных чисел  $p + iq$  где  $p, q$  - рациональные числа?
2. Покажите равномощность множеств точек интервалов  $(0, 2)$  и  $(1, 6)$  при помощи формул и геометрически.
3. Покажите равномощность множеств точек прямой и полупрямой.
4. Покажите, что множество точек произвольной окружности эквивалентно множеству всех точек прямой.
5. Докажите, что множество всех аналитических функций имеет мощность континуума.
6. Докажите, что множество всех степенных рядов имеет мощность континуума.
7. Постройте примеры замкнутых, плотных в себе, совершенных и открытых множеств.
8. Может ли некоторое множество быть одновременно и замкнутым, и открытым? Существуют ли множества одновременно незамкнутые и неоткрытые? Приведите примеры.
9. Существует ли линейное ограниченное множество, такое, что его верхняя граница совпадает с его нижней границей. Как оно выглядит?
10. Докажите, что для любых линейных множеств  $E_1$  и  $E_2$  справедливо равенство  $C(E_1 \setminus E_2) = CE_1 \cup E_2$ .
11. Как построить совершенное, нигде не плотное ограниченное множество положительной меры?
12. Докажите измеримость функции  $f(x) = \varphi(x) \sin x$ , определенной на отрезке  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , где  $\varphi(x)$  - функция Дирихле.
13. Докажите измеримость всякой рациональной (не целой) функции на любом промежутке.
14. В чем заключается принципиальное различие мероопределений Жордана и Лебега?
15. Приведите примеры измеримых и неизмеримых функций.



16. Почему всякая функция с ограниченным изменением интегрируема по Риману?

17. Составьте интегральную сумму Лебега для функции  $f(x) = \sin x$  на отрезке  $[0,1]$ . Покажите, какой площади на чертеже соответствует составленная сумма.

18. Приведите примеры функций, интегрируемых по Лебегу, но не интегрируемых по Риману.

19. Исследовать на сходимость интеграл:

$$\begin{array}{lll} \text{а)} \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}; & \text{б)} \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}; & \text{в)} \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}; \\ \text{г)} \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx; & \text{д)} \int_0^{+\infty} \sin x e^{-x} dx; & \text{е)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}. \end{array}$$

20. Определить, при каких  $p$  интеграл  $\int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$  сходится, а при каких - расходится.

21. Исследовать на сходимость интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ ,  $p > 0$ .

22. Исследовать на сходимость интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ .

23. При каких значениях  $p$  интеграл  $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$  ( $a > 0$ ) сходится?

24. При каких значениях  $p$  интеграл  $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$  ( $a > 0$ ) сходится?

25. При каких значениях  $k$  сходятся интегралы: а)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^k \ln x}$ ; б)  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^k x}$ ?

26. При каких значениях  $k$  сходится интеграл:  $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$  ( $b < a$ )?

27. Можно ли найти такое  $k$ , чтобы интеграл  $\int_0^{+\infty} x^k dx$  сходиллся?

## 2.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации (зачет/экзамен)

### Вопросы к зачету

#### Семестр 1

1. Структура линейных множеств.
2. Открытые и замкнутые множества.
3. Канторовы совершенные множества.
4. Структура открытых и замкнутых множеств.
5. Мера Жордана для линейных множеств.

6. Мера Жордана для множества  $E_n$ . Квадрируемые и кубируемые множества.
7. Мера Лебега для линейных множеств. Понятие измеримого по Лебегу множества. Примеры измеримых множеств.
8. Свойства множеств, измеримых по Лебегу.
9. Измеримые функции.
10. Дифференцирование и интегрирование под знаком интеграла.
11. Случай, когда подынтегральное выражение и пределы интеграла зависят от параметра.
12. Равномерная сходимость интегралов.
13. Использование равномерной сходимости интегралов (предельный переход под знаком интеграла, интегрирование и дифференцирование интеграла по параметру).
14. Эйлеров интеграл первого типа.
15. Эйлеров интеграл второго типа. Свойства функции  $\Gamma(a)$ .

### **Вопросы к экзамену**

#### Семестр 2

1. Понятие интеграла Лебега для простых функций.
2. Понятие интеграла Лебега для произвольных измеримых функций.
3. Переход к пределу под знаком интеграла Лебега.
4. Свойства интеграла Лебега.
5. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана.
6. Монотонные функции, их дифференциальные свойства.
7. Функции ограниченной вариации на отрезке. Связь с монотонными функциями.
8. Абсолютно непрерывные на отрезке функции. Восстановление функции по ее производной.
9. Неопределенный интеграл Лебега.
10. Определение и свойства интеграла Римана-Стилтьеса.
11. Определение и свойства интеграла Лебега-Стилтьеса.
12. Системы функций Чебышева и их свойства.
13. Системы функций Маркова и их свойства.
14. Представление систем Маркова при помощи интеграла Стилтьеса.
15. Аналитическое приближение функций.
16. Основные принципы решения задач аппроксимации.
17. Основные методы аппроксимации. Метод интерполяции Лагранжа.
18. Основные методы аппроксимации. Интерполяционный полином Ньютона.
19. Основные методы аппроксимации. Интерполяция сплайнами.
20. Основные методы аппроксимации. Аппроксимация функций по методу наименьших квадратов.
21. Основные методы аппроксимации. Аппроксимация функций рядами Фурье.

22. Аппроксимация кривых экспоненциальными функциями.
23. Ортогональный метод решения систем линейных уравнений.
24. Сравнение способов аппроксимации.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству промежуточный контроль (экзамен)

Шкала оценивания (интервал баллов)	Критерий оценивания
отлично (55-60)	Студент глубоко и в полном объеме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (43-54)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (30-42)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно четкие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (0-29)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач.